الفقرة الأولى: إذا كانت المعطيات الابتدائية $\varphi(x)\,,\,\psi(x)$ في مسألة انتشار الذبذبات على مستقيم لانهائي هي دوال فردية بالنسبة لنقطة x_0 ، أثبت أن الحل المناظر في هذه النقطة يكون مساوياً للصفر أو أثبت أن $u(0\,,t)=0$.

البرهان:

نعتبر النقطة x_0 هي نقطة الأصل في هذه الحالة أي $x_0=0$ ونكتب الشروط الفردية للمعطيات الابتدائية بالشكل:

$$\varphi(-x)=-\varphi(x) \quad , \quad \psi(-x)=-\psi(x)$$

وعلاقة دالأمبير تعطي حل المسألة :

$$u(x\,,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz$$

ومه نجد أنَّ:

$$u(0,\,t)=\frac{\varphi(at)+\varphi(-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}\psi(z)dz$$

إنَّ الحد الأخير (التكامل الأخير) يساوي الصفر لأنه تكامل لدالة فردية على مجال متناظر، وبما أنَّ الدالة $\varphi(x)$ فردية فإنَّ:

$$u(0,\,t)=\frac{\varphi(at)-\varphi(at)}{2}+0=0$$

الفقرة الثانية : إذا كانت المعطيات الابتدائية $\varphi(x)\,,\,\psi(x)$ في مسألة انتشار الذبذبات على مستقيم لانهائي هي دوال زوجية بالنسبة لنقطة x_0 ، أثبت أنَّ مشتق الحل المناظر في هذه النقطة يكون مساوياً للصفر أي أثبت أنَّ $u_x(0\,,t)=0$.

البرهان:

نعتبر النقطة x_0 هي نقطة الأصل في هذه الحالة أي $x_0=0$ ونكتب الشروط الزوجية للمعطيات الابتدائية بالشكل:

$$\varphi(-x)=\varphi(x) \quad , \quad \psi(-x)=\psi(x)$$

وبما أنَّ $\varphi(x)\,,\,\psi(x)$ هي دوال زوجية فإنَّ مشتقاتها $\varphi'(x)\,,\,\psi'(x)$ هي دوال فردية أي أنها تحقق:

$$\varphi'(-x)=-\varphi'(x) \quad , \quad \psi'(-x)=-\psi'(x)$$

وعلاقة دالأمبير تعطي حل المسألة :

$$u(x\,,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz$$

وباشتقاق الحل بالنسبة لـ x نجد أنَّ:

$$u_x(x\,,t)=\frac{\varphi'(x+at)+\varphi'(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\left[\psi(x+at)(1)-\psi(x-at)(1)\right]$$

وبالتالي فإنَّ:

$$u_x(0,\,t)=\frac{\varphi'(at)+\varphi'(-at)}{2}+\frac{1}{2a}\left[\psi(at)-\psi(-at)\right]$$

وبما أنَّ $\varphi'(x)$ دالة فردية ، وأنَّ $\psi(x)$ دالة زوجية فإنَّ:

$$u_x(0,t)=\frac{\varphi'(at)-\varphi'(at)}{2}+\frac{1}{2a}\left[\psi(at)-\psi(at)\right]=0$$

الفقرة الثالثة : أوجد حل المعادلة:

$$u_{tt}=a^2u_{xx}\quad\cdots\cdots(1)$$

والمحقق للشروط الابتدائية:

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x)\quad,\quad u_t\big|_{t=0}=\psi(x)\quad\cdots\cdots(2)$$

$$u(0,t)=0\quad;\quad t>0\quad\cdots\cdots(3)$$

علماً أنَّ $\varphi(x)$, $\psi(x)$ دالتين فرديتين.

الحل:

لندرس الدالتين $\phi(x)$, $\Psi(x)$ اللتين تعتبران استكمالين فرديين للدالتين $\varphi(x)$, $\psi(x)$ اللتين تدخلان في الشروط (2) أي أنَّ:

$$\phi(x)=\begin{cases}\varphi(x) & ,\quad x>0\\ -\varphi(-x) & ,\quad x<0\end{cases}\qquad,\qquad \Psi(x)=\begin{cases}\psi(x) & ,\quad x>0\\ -\psi(-x) & ,\quad x<0\end{cases}$$

ومن علاقة دالأمبير لدينا:

$$u(x,t)=\frac{\phi(x+at)+\phi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(z)dz\quad\cdots\cdots(4)$$

معرفة على جميع قيم x حيث $-\infty<x<+\infty$, $t>0$ ، وحسب نظرية سابقة وجدنا أن $u(0,t)=0$ ، أي أنَّ الدالة المعرفة بالعلاقة (4) عندما $x=0$ تحقق الشرط الحدي (3) ، ومن جهة أخرى فإنَّ هذه الدالة عندما $t=0$ و $x>0$ تحقق الشروط الابتدائية (2) وذلك لأنَّ:

$$u(x,0)=\frac{\phi(x)+\phi(x)}{2}+\underbrace{\frac{1}{2a}\int_{x}^{x}\Psi(z)dz}_{=0}=\frac{2\phi(x)}{2}=\phi(x)=\varphi(x)\quad;\quad x>0$$

ولنوجد u_t :

$$u_t(x,t)=\frac{(a)\phi'(x+at)+(-a)\phi'(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\left[\Psi(x+at)(a)-\Psi(x-at)(-a)+0\right]$$

$$u_t(x,0)=\frac{a\phi'(x)-a\phi'(x)}{2}+\frac{1}{2a}\left[a\Psi(x)+a\Psi(x)\right]=\Psi(x)=\psi(x)\ ;\ x>0$$

وهذا الحل (أي الحل (4)) بالعودة للدوال القديمة $\varphi(x)$, $\psi(x)$ يكتب على الشكل التالي:

❶ حالة $x-at>0$ أي $t<\frac{x}{a}$: من العلاقة (4) نحصل على:

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz\quad;\quad t<\frac{x}{a}$$

وهي علاقة دالأمبير.

❷ حالة $x-at<0$ أي $t>\dfrac{x}{a}$:

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\underbrace{\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(z)\,dz}_{=I}$$

ومنه فإنَّ:

$$I=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(z)\,dz=\frac{1}{2a}\left[\int_{x-at}^{0}\Psi(z)\,dz+\int_{0}^{x+at}\Psi(z)\,dz\right]=$$

$$=\frac{1}{2a}\left[\underbrace{\int_{x-at}^{0}-\psi(-z)\,dz}_{=I_1}+\int_{0}^{x+at}\psi(z)\,dz\right]$$

ولإنجاز التكامل I_1 نجري التحويل:

$$-z=v\ \Rightarrow\ -dz=dv$$
$$z=x-at\quad,\quad v=at-x$$
$$z=0\ \Rightarrow\ v=0$$

ومنه فإنَّ:

$$I_1=\int_{x-at}^{0}-\psi(-z)\,dz=\int_{at-x}^{0}\psi(v)\,dv=\int_{at-x}^{0}\psi(z)\,dz$$

ومنه يكون:

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)-\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\left[\int_{at-x}^{0}\psi(z)\,dz+\int_{0}^{at+x}\psi(z)\,dz\right]$$
$$=\frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{at+x}\psi(z)\,dz$$



الفقرة الرابعة : أوجد حل المعادلة:

$$u_{tt}=a^2u_{xx}\quad\cdots\cdots(1)$$

والمحققة للشروط الابتدائية:

$$u|_{t=0}=\varphi(x)\quad,\quad u_t|_{t=0}=\psi(x)\quad\cdots\cdots(2)$$
$$u_x(0,t)=0\quad;\quad t>0\quad\cdots\cdots(3)$$

علماً أنَّ $\varphi(x)\ ,\ \psi(x)$ دالتين زوجيتين.

الحل:

لندرس الدالتين $\phi(x)\ ,\ \Psi(x)$ اللتين تعتبران استكماليين زوجيين للدالتين $\varphi(x),\psi(x)$ اللتين تدخلان في الشروط (2) أي أنَّ:

$$\phi(x)=\begin{cases}\varphi(x) & , \quad x>0\\ \varphi(-x) & , \quad x<0\end{cases} \qquad , \qquad \Psi(x)=\begin{cases}\psi(x) & , \quad x>0\\ \psi(-x) & , \quad x<0\end{cases}$$

ومن علاقة دالأمبير لدينا:

$$u(x\,,\,t)=\frac{\phi(x+at)+\phi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(z)dz \quad \cdots(4)$$

معرفة على جميع قيم x حيث $-\infty<x<+\infty \;,\; t>0$ ، وحسب نظرية سابقة وجدنا أن $u_x(0\,,t)=0$ ، أي أنَّ الدالة المعرفة بالعلاقة(4) عندما $x=0$ تحقق الشرط الحدي (3) ، ومن جهة أخرى فإنَّ هذه الدالة عندما $t=0$ و $x>0$ تحقق الشروط الابتدائية (2) وذلك لأنَّ:

$$u(x\,,0)=\frac{\phi(x)+\phi(x)}{2}+\underbrace{\frac{1}{2a}\int_{x}^{x}\Psi(z)dz}_{=0}=\frac{2\phi(x)}{2}=\phi(x)=\varphi(x) \;\; ; \;\; x>0$$

ولنوجد u_t :

$$u_t(x\,,\,t)=\frac{(a)\phi'(x+at)+(-a)\phi'(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\Big[\Psi(x+at)(a)-\Psi(x-at)(-a)+0\Big]$$

$$u_t(x\,,0)=\frac{a\phi'(x)-a\phi'(x)}{2}+\frac{1}{2a}\Big[a\Psi(x)+a\Psi(x)\Big]=\Psi(x)=\psi(x) \;;\; x>0$$

وهذا الحل (أي الحل (4)) بالعودة للدوال القديمة $\varphi(x)\,,\,\psi(x)$ يكتب على الشكل التالي:

❶ حالة $x-at>0$ أي $t<\dfrac{x}{a}$: من العلاقة (4) نحصل على:

$$u(x\,,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz \quad ; \quad t<\frac{x}{a}$$

وهي علاقة دالأمبير.

❷ حالة $x-at<0$ أي $t>\dfrac{x}{a}$:

$$u(x\,,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(at-x)}{2}+\underbrace{\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(z)\,dz}_{=I}$$

ومنه فإنَّ:

$$I=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(z)\,dz=\frac{1}{2a}\left[\int_{x-at}^{0}\Psi(z)\,dz+\int_{0}^{x+at}\Psi(z)\,dz\right]=$$

$$=\frac{1}{2a}\left[\underbrace{\int_{x-at}^{0}\psi(-z)\,dz}_{=I_1}+\int_{0}^{x+at}\psi(z)\,dz\right]$$

ولإنجاز التكامل I_1 نجري التحويل:

$$-z = v \Rightarrow -dz = dv$$
$$z = x - at \quad , \quad v = at - x$$
$$z = 0 \Rightarrow v = 0$$

ومنه فإنَّ:

$$I_1 = \int_{x-at}^{0} \Psi(z)\,dz + \int_{x-at}^{0} \psi(-z)\,dz = \int_{at-x}^{0} -\psi(v)\,dv = \int_{0}^{at-x} \psi(z)\,dz$$

ومنه يكون:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a}\left[\int_{0}^{at-x} \psi(z)\,dz + \int_{0}^{at+x} \psi(z)\,dz\right]$$